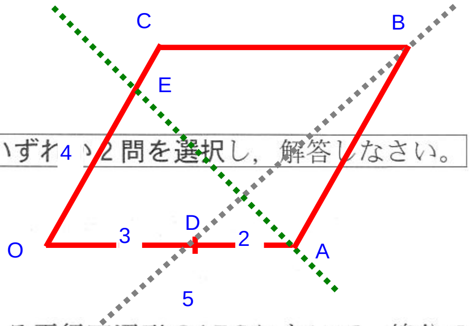


第４問　（選択問題）（配点　20）

$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OC}=4$，$\angle\mathrm{AOC}=\theta$ である平行四辺形 OABC において，線分 OA を $3:2$ に内分する点を D とする。また，点 A を通り直線 BD に垂直な直線と直線 OC の交点を E とする。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。

以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおき，実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{c}$ と表す。

DB = DA + AB = 2 OA / 5 + CD = 2a / 5 + c

(1)　t を $\cos\theta$ を用いて表そう。

a ・c = | a | | c | cos θ = 5 ・4 cos θ = 20 cos θ

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}-\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{DB}}=\frac{\boxed{\text{ア}\ 2}}{\boxed{\text{イ}\ 5}}\vec{a}+\vec{c},\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ウエ}\ 20}\cos\theta$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\boxed{\text{オ}\ 0}$ により

$$t=\frac{\boxed{\text{カ}\ 5}\left(\boxed{\text{キ}\ 2}\cos\theta+1\right)}{\boxed{\text{ク}\ 4}\left(\cos\theta+\boxed{\text{ケ}\ 2}\right)}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ①$$

となる。

AE ・DB = 0　∵ (AE ⊥ DB)
AE ・DB = (tc - a) (2a / 5 + c)= (2a ・c / 5 + c ・c) t - 2 a ・a / 5 - a・c
= 2 (4 cos θ+ 16) t - 10 - 20 cos θ = 8 (cos θ + 2) t - 10(2 cos θ + 1) = 0
∴ t = 10 (2 cos θ + 1) / 8 (cos θ + 2) = 5 (2 cos θ + 1) / 4 (cos θ + 2)

(2)　点 E は線分 OC 上にあるとする。θ のとり得る値の範囲を求めよう。ただし，線分 OC は両端の点 O，C を含むものとする。以下，$r=\cos\theta$ とおく。

点 E が線分 OC 上にあることから，$0\leqq t\leqq 1$ である。$-1<r<1$ なので，① の右辺の $\cos\theta$ を r に置き換えた分母 $\boxed{\text{ク}\ 4}\left(r+\boxed{\text{ケ}\ 2}\right)$ は正である。したがって，条件 $0\leqq t\leqq 1$ は

$$0\leqq\boxed{\text{カ}\ 5}\left(\boxed{\text{キ}\ 2}r+1\right)\leqq\boxed{\text{ク}\ 4}\left(r+\boxed{\text{ケ}\ 2}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\ ②$$

となる。

（数学Ⅱ・数学Ｂ第４問は次ページに続く。）

r についての不等式②を解くことにより，θ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\pi}{\boxed{コ\ 3}} \leqq \theta \leqq \frac{\boxed{サ\ 2}}{\boxed{シ\ 3}}\pi$$

であることがわかる。

0 ≦ 5 (2r + 1) ≦ 4 (r + 2)　より
0 ≦ 5 (2r + 1)
- 1 / 2 ≦ r

5 (2r + 1) ≦ 4 (r + 2)
10 r + 5 ≦ 4r + 8
6r ≦ 3
r ≦ 1 / 2

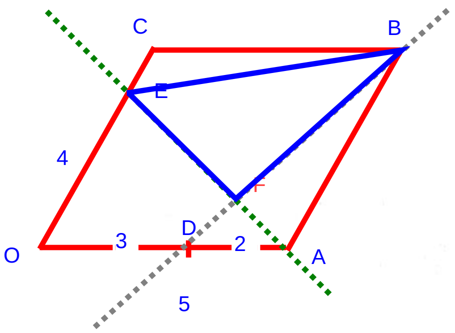
- 1 / 2 ≦ r = cos θ ≦ 1 / 2

∴θ = 60°, 120° = π/ 3 , 2π / 3

(3)　$\cos\theta = -\frac{1}{8}$ とする。直線 AE と直線 BD の交点を F とし，三角形 BEF の面積を求めよう。①により，$t = \frac{\boxed{ス\ 1}}{\boxed{セ\ 2}}$ となり

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\boxed{ソ\ 2}}{\boxed{タ\ 3}}\vec{a} + \frac{\boxed{チ\ 1}}{\boxed{ツ\ 6}}\vec{c}$$

となる。したがって，点 F は線分 AE を 1 : $\boxed{テ\ 2}$ に内分する。このことと，平行四辺形 OABC の面積は $\frac{\boxed{ト\ 15}\sqrt{\boxed{ニ\ 7}}}{\boxed{ヌ\ 2}}$ であることから，三角形 BEF の面積は $\frac{\boxed{ネ\ 5}\sqrt{\boxed{ノ\ 7}}}{\boxed{ハ\ 2}}$ である。



EF:FA = s：1 - s　とする。
OF = s a + (1 - s) c / 2　・・・③

DF:FB = v：1 -v　とする。
OF = OD + v DB = 3 a / 5 + v (2 a / 5 + c)
　= (3 + 2 v) a /5 + v c　・・・④

③④より
s = (3 + 2 v) / 5
(1 - s) / 2 = v

よって　s = 2 / 3

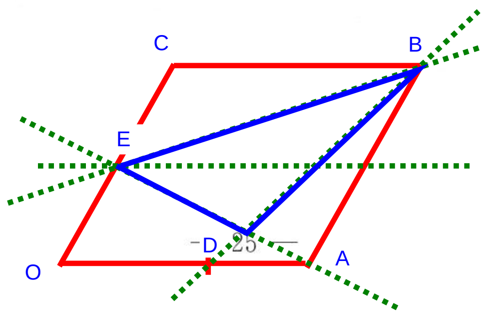
③式より
OF = 2 a / 3 + c / 6

sinθ = | √(1 - cos θ ^{2}) |
　= | √(1 - 1/64) |
　= | √(63 / 64) |
　= 3√7 / 8

三角形OACの面積
= 1 / 2 × a × c × sin θ
= 1 / 2 × 5 × 4 × 3 √7 / 8

平行四辺形OABCの面積
= 三角形OACの面積× 2
= 1 / 2 × 5 × 4 × 3 √7 / 8 × 2
= 5 × 3 √7 / 2
= 15 √7 / 2

t = 5 (2 cos θ + 1) / 4 (cos θ + 2)
　= 5 { 2 (- 1 / 8) + 1 } / 4 (- 1 / 8 + 2)
　= 1 / 2



点Eは線分ODの中点である。
点Eを通るOAに平行な線を引くと

⊿OAE = ⊿BCE = 四辺形OABC / 4
が分かる

OE:EC = 2 : 2　なので（EはOCの中点）
⊿OAE = ⊿BCE = 四辺形OABC / 4

よって⊿ABEの面積は
四辺形 OABC の1 / 2 である。
EF : FA＝ 2 ： 1 なので

⊿ABE　= 2 / 3 × S/ 2
　= 5√7 / 2