点Pにおける接線方程式は
y = f ' (a) (x - a) + a^3　で表せるので
f ' (a) = 3 a ^ 2　とあわせて

y = (3 a ^2)(x - a) + a^3
= (3 a ^ 2) x - (3 a ^ 3) + a^3
= (3 a ^ 2) x - 2 a ^ 3…③

第2問 (必答問題) (配点　30)

座標平面上で曲線 $y = x^3$ を C とし，放物線 $y = x^2 + px + q$ を D とする。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ における C の接線の方程式は

$$y = 3a^{\boxed{ア}\,2}x - \boxed{イ\ 2}\,a^{\boxed{ウ}\,3}$$

である。放物線 D は点Pを通り，D のPにおける接線と，C のPにおける接線が一致するとする。このとき，p と q を a を用いて表すと

$$\begin{cases} p = 3a^{\boxed{エ}\,2} - \boxed{オ\ 2}\,a \\ q = \underset{-2}{\boxed{カキ}}\,a^3 + a^{\boxed{ク}\,2} \end{cases} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる。

以下，p，q は①を満たすとする。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

放物線Dが点Pを通るので
a ^ 3 = a ^ 2 + p a + q
q = a ^ 3 - a ^ 2 - p a …④

放物線Dの点Pにおける接線方程式の傾きと
曲線Cの点Pにおける接線方程式の傾きは
一致するので
3 a ^ 2 = 2a + p
p = 3 a ^ 2 - 2a…⑤

④⑤より、
q = a ^ 3 - a ^ 2 - p a
= a ^ 3 - a ^ 2 - (3 a ^ 2 - 2a) a
= a ^ 3 - a ^ 2 - 3 a ^ 3 + 2a ^ 2
= - 2 a ^ 3 + a ^ 2

放物線Ｄが点Qを通るので
b = 0 + 0 + q
= q
= - 2 a ^ 3 + a ^ 2

(2) 放物線 D が y 軸上の与えられた点 Q$(0,\ b)$ を通るとき

$$b = \boxed{ケコ\ -2}\,a^3 + a^{\boxed{サ}\,2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つ。与えられた b に対して，② を満たす a の値の個数を調べよう。

そのために，関数

$$f(x) = \boxed{ケコ}\,x^3 + x^{\boxed{サ}}$$

文意より
f(x) = - 2 x ^ 3 + x ^ 2
と考える と、極値を取るのは
f ' (x) = 0 を解けばよいので

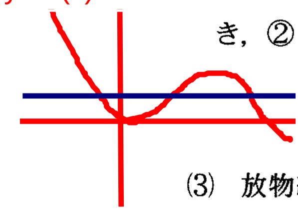
の増減を調べる。関数 $f(x)$ は，$x = \boxed{シ\ 0}$ で極小値 $\boxed{ス\ 0}$ をとり，

$x = \dfrac{\boxed{セ\ 1}}{\boxed{ソ\ 3}}$ で極大値 $\dfrac{\boxed{タ\ 1}}{\boxed{チツ\ 27}}$ をとる。

f ' (x) = - 6 x ^ 2 + 2 x = - 2x (3x) -2x (-1)
= - 2x (3x -1) より
x = 0 , 1 /3 の時, 極値を取る。
f (0) = 0
f (1/ 3) = -2 (1/ 3)^3 + (1 /3) ^2 = 1/ 27

関数 $y = f(x)$ のグラフをかくことにより，$\boxed{ス\ 0} < b <$ 1/27 のと

y = f(x) = - 2 x ^ 3 + x ^ 2



き，② を満たす a の値の個数は $\boxed{テ\ 3}$ であることがわかる。

(3) 放物線 D の頂点が x 軸上にあるのは，$a = \boxed{ト\ 0}$，$\dfrac{\boxed{ナ\ 4}}{\boxed{ニ\ 9}}$ の二つの場合である。$a = \boxed{ト\ 0}$ のときの放物線を D_1，$a = \dfrac{\boxed{ナ\ 4}}{\boxed{ニ\ 9}}$ のときの放物線を D_2 とする。D_1，D_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{2^{\boxed{ヌ}\,4}}{3^{\boxed{ネノ}\,10}}$ である。

放物線Ｄは
y = x ^ 2 + p x + q
= (x + p/2) ^2 + (q - p^2 /4)
と変形できる。
頂点が x 軸上にある
ので x = - p/2 の時、y = 0 が成り立つ

よって
q - p^2 /4 = 0
p ^2 = 4q

①より q = - 2 a ^ 3 + a ^ 2
p = 3 a ^ 2 - 2a なので
(3 a^2 - 2a)^2 = 4 (- 2 a^3 + a^2)
9 a^4 -12a^3 + 4a^2 = -8 a^3 + 4 a^2
9 a^4 -12a^3 + 8a^3 + 4 a^2 - 4 a^2 = 0
9 a^4 -4a^3 = 0
a^3 (9a - 4) = 0

∴ a = 0 , 4 / 9

a = 0 ⇒ p = 0 , q = 0 ⇒ D1 : y = x^2
a = 4/9 ⇒ p = - 8 / 27 ⇒ D2 : y = (x - 4 /27) ^2

D1 と D2 の交点のx座標は
x ^ 2 = (x - 4 /27) ^2 より
x ^ 2 = x^2 - 2 (4 /27)x + (4 /27)^2
0 = - 2 (4 /27)x + (4 /27)^2
2 (4 /27)x = (4 /27)^2
2 x = (4 /27)
x = 2 /27
よって求める面積は 下式で表せる。

$$\int_0^{2/27} x^2 dx + \int_{2/27}^{4/27} (x - 4/27)^2 dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{27}}$$

= 2 (1 / 3) {2 / (3)^3} ^3
= 2 (2^ 3) × (1/ 3) (1/ 3)^9
= 2^4 × (1/ 3)^10