数学Ⅱ・数学B　(注)この科目には，選択問題があります。(15ページ参照。)

第１問　(必答問題)(配点　30)

よく出る対数問題パターン。
0 < a < 1 , 1 < a の２場合を考えること。

〔1〕　$a>0$，$a \neq 1$ として，不等式

$$2\log_a(8-x) > \log_a(x-2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす x の値の範囲を求めよう。

対数問題は　必ず真数条件を考える。
真数条件より 8 - x > 0 , x - 2 > 0
2 < x < 8 …①'

真数は正であるから，$\boxed{\text{ア}}$ 2 $< x <$ $\boxed{\text{イ}}$ 8

$\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

底 a が $a<1$ を満たすとき，不等式 ① は

$$x^2 - \boxed{\text{ウエ}}\,x + \boxed{\text{オカ}}\ \boxed{\text{キ}}\ 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

17　66　<

となる。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ については，当てはまるものを，次の⓪～②のうちから一つ選べ。

⓪　<　　　　①　=　　　　②　>

(数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。)

底が 0 < a < 1 なので、不等号が反対になる

底が 0 < a < 1 なので、
(8 - x) ^ 2　<　(x - 2) が成り立つ。よって
64 - 16 x + x ^2　<　x - 2
x ^ 2 - 17 x + 66　<　0　…②
(x - 6) (x - 11)　<　0

6 < x < 11　…②'

したがって，真数が正であることと②から，$a<1$ のとき，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ク}\ 6}<x<\boxed{\text{ケ}\ 8}$ である。

同様にして，$a>1$ のときには，不等式①を満たす x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{コ}\ 2}<x<\boxed{\text{サ}\ 6}$ であることがわかる。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

真数条件　2 < x < 8 …①'　と 6 < x < 11　…②'　より
x の共通範囲は

6 < x < 8

底が 1 < a なので、不等号はそのまま

底が 1 < a　なので、

(8 - x) ^ 2　> (x - 2) が成り立つ。よって
64 - 16 x + x ^2　>　x - 2
x ^ 2 - 17 x + 66　>　0　…③
(x - 6) (x - 11)　>　0

x < 6 ，11 < x　…③'

真数条件　2 < x < 8 …①'　と x < 6 ，11 < x　…③'　より
x の共通範囲は

2 < x < 6

単位円をうまく思い付いたら解けるか？
今年の数学の一番の難問？

数学Ⅱ・数学B

sin (π/ 6) = sin 30°= 1/ 2 = cos 2β

0 ≦ 2β ≦ 2πより
cos 2β = 1 / 2となるのは
2β = 60°, 300°= 1 /3 π, 5 / 3π
β = 1 /6 π, 5 / 6π

〔2〕 $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ として

$$\sin\alpha = \cos 2\beta$$

を満たす β について考えよう。ただし，$0 \leqq \beta \leqq \pi$ とする。

たとえば，$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，β のとり得る値は $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{シ}}\,6}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ス}}\,5}{\boxed{\text{シ}}\,6}\pi$ の二つである。

このように，α の各値に対して，β のとり得る値は二つある。そのうちの小さい方を β_1，大きい方を β_2 とし

$$y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$$

が最大となる α の値とそのときの y の値を求めよう。

β_1，β_2 を α を用いて表すと，$0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のときは

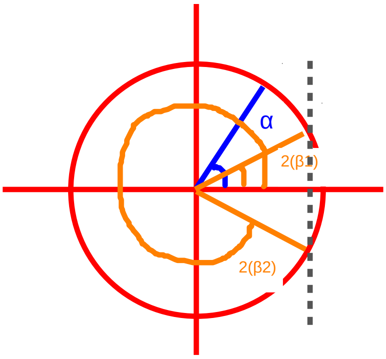
$$\beta_1 = \frac{\pi}{\boxed{\text{セ}}\,4} - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}\,2}, \quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{タ}}\,3}{\boxed{\text{セ}}\,4}\pi + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ソ}}\,2}$$

となり，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \pi$ のときは

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{\boxed{\text{チ}}\,4} + \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}\,2}, \quad \beta_2 = \frac{\boxed{\text{テ}}\,5}{\boxed{\text{チ}}\,4}\pi - \frac{\alpha}{\boxed{\text{ツ}}\,2}$$

となる。

（数学Ⅱ・数学B第１問は次ページに続く。）



単位円で考えたら
sin α は y 座標を意味する
cos β は x 座標を意味する
その値が一致すると設問は述べている。

第１象限を考えると
2(β1) = 90° - α = π / 2 - α
(β1) = π / 4 - α / 2

第４象限を考えると
2(β2) = 360° - 2(β1) = π - (π / 4 - α / 2)
(β2) = 3 π / 4 + α / 2

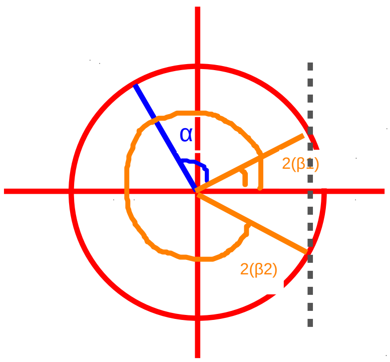
したがって，$\alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3}$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{ト}\ 3}}{\boxed{\text{ナ}\ 8}}\pi \leqq \alpha+\frac{\beta_1}{2}+\frac{\beta_2}{3} \leqq \frac{\boxed{\text{ニヌ}}\ 11}{\boxed{\text{ネ}\ 8}}\pi$$

である。よって，y が最大となる α の値は $\frac{\boxed{\text{ノ}\ 3}}{\boxed{\text{ハヒ}}\ 22}\pi$ であり，そのときの y の値は $\boxed{\text{フ}}$ であることがわかる。$\boxed{\text{フ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ $\frac{1}{2}$ ① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

π/ 2 ≦ α ≦ πより



単位円で考えたら
sin α は y 座標を意味する
第２象限の角度となる。
sin α = sin (α - 90)
cos β は x 座標を意味する
その値が一致すると設問は述べている。

第１象限を考えると
2(β1) = α - π / 2
(β1) = α / 2 - π / 4 = - π / 4 + α / 2

第４象限を考えると
2(β2) = 360° - 2(β1) = π - (- π / 4 + α / 2)
(β2) = 5 π / 4 - α / 2

0 ≦ α < π/ 2の場合

α + (β1) / 2 + (β2) / 3
= α +(π / 4 - α / 2) / 2 + (3 π / 4 + α / 2) / 3
= α + π / 8 - α / 4 + π / 4 + α / 6
= α - α / 4 + α / 6 + π / 8 + π / 4
= (12α - 3α + 2α) /12 + (1 + 2) π / 8
= 11α / 12 + 3π / 8

π/ 2 ≦ α ≦ π の場合

α + (β1) / 2 + (β2) / 3
= α +(- π / 4 + α / 2) / 2 + (5 π / 4 - α / 2) / 3
= α - π / 8 + α / 4 + 5 π / 12 - α / 6
= α + α / 4 - α / 6 - π / 8 + 5 π / 12
= (12α + 3α - 2α) /12 + (- 3 + 10) π / 24
= 13α / 12 + 7π / 24

0 ≦ α < π/ 2より
(11 / 12) × 0 ≦ (11 / 12) α < (11 / 12)× π/ 2
0 + 3π / 8 ≦ 11α/ 12 + 3π / 8 < 11π / 24 + 3π / 8
3π / 8 ≦ 11α/ 12 + 3π / 8 < 20π / 24 = 5π / 6 …④

π/ 2 ≦ α ≦ π より
(13 / 12) × π/ 2 ≦ (13 / 12) α < (13 / 12)× π
(13 / 12) × π/ 2 + 7π / 24 ≦ (13 / 12) α + 7π / 24 < (13 / 12)× π + 7π / 24
5π / 6 = 20π / 24 ≦ (13 / 12) α + 7π / 24 < 33π / 24 = 11π / 8 …⑤

④⑤より共通部分は
3π / 8 ≦ α + (β1) / 2 + (β2) / 3 ≦ 11π / 8

y = sin θ の単位円を考えると、
y はθ = π/ 2の場合、最大値 1を取る
よって、11α/ 12 + 3π / 8 = π/2 より
22a + 9π = 12π
22a = 12π - 9π = 3π
a = 3π / 22