式の変形

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + (2a+4)x + b \\
&= -x^2 + 2(a+2)x + b \\
&= -\{x^2 - 2(a+2)x + (a+2)^2 - (a+2)^2\} + b \\
&= -\{x - (a+2)\}^2 + (a+2)^2 + b \\
&= -\{x - (a+2)\}^2 + a^2 + 4a + 4 + b \\
&= -\{x - (a+2)\}^2 + (a^2 + 4a + b + 4)
\end{aligned}
$$

数学Ⅰ・数学A

良問

第２問 （配点 25）

a，b を定数として２次関数

センター試験では、解答欄の形に揃えることが大切

$$y = -x^2 + (2a+4)x + b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

について考える。関数 ① のグラフ G の頂点の座標は

$$\left(a + \boxed{\text{ア}}\ 2,\ a^2 + \boxed{\text{イ}}\ 4\,a + b + \boxed{\text{ウ}}\ 4\right)$$

である。以下，この頂点が直線 $y = -4x - 1$ 上にあるとする。このとき，

$$b = -a^2 - \boxed{\text{エ}}\ 8\,a - \boxed{\text{オカ}}$$

13

である。

（数学Ⅰ・数学A第２問は次ページに続く。）

頂点　が　直線　y = - 4x - 1 上にあるので、

x = a + 2
y = a^2 + 4a + b + 4
をy = - 4x - 1 に代入する。と、

a^2 + 4a + b + 4　= - 4 (a + 2) - 1
a^2 + 4a + 4 + b　= - 4 a - 8 - 1
b　= - 4 a - 8 - 1 - (a^2 + 4a + 4)
b　= - 4 a - 8 - 1 - a^2 - 4a - 4
b　= - a^2 - 4 a - 4 a - 4 - 8 - 1
b　= - a^2 - 8 a - 13

２点で交わる　=>　y > 0 が成り立つ。よって、
a^2 + 4a + b + 4　> 0
b　= - a^2 - 8 a - 13　より

a^2 + 4a + 4 + (- a^2 - 8 a - 13) > 0
a^2 + 4a + 4　- a^2 - 8 a - 13　> 0
- 4a - 9　> 0
4a < - 9
a < - 9 / 4

(1)　グラフ G が x 軸と異なる２点で交わるような a の値の範囲は

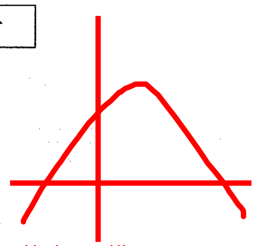
$$a < \frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$$ $\frac{-9}{4}$

である。また，G が x 軸の正の部分と負の部分の両方で交わるような a の値の範囲は

Gがx軸の正の部分と負の部分の両方で交わる
=>　x = 0 の時に, y > 0が成り立つ　ということ。①式に x= 0を代入して y = b > 0

$$-\boxed{コ}\,4 - \sqrt{\boxed{サ}\,3} < a < -\boxed{コ} + \sqrt{\boxed{サ}}$$

である。



簡略図を描いてみると、
気付きやすい

(2)　関数①の $0 \leqq x \leqq 4$ における最小値が -22 となるのは

$$a = \boxed{シス}\ \ \text{または}\ \ a = \boxed{セ}$$
-3　　1

のときである。また $a = \boxed{セ}$ 1 のとき，関数①の $0 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $\boxed{ソタチ}$ である。
-13

一方，$a = \boxed{シス}$ のときの①のグラフを x 軸方向に $\boxed{ツ}$ 4，y 軸方向に $\boxed{テトナ}$ だけ平行移動すると，$a = \boxed{セ}$ のときのグラフと一致する。
-16

y = b = - a^2 - 8 a - 13 > 0
a^2 + 8 a + 13 < 0
(a + 4)^2 - 3　< 0
(a + 4)^2　　< 3
| a + 4 |　　< √3

- √3 <　a + 4　　< √3
- 4 - √3 <　a　　< - 4 + √3

上に凸なグラフが指定範囲で最小値を取るので、
頂点の x 座標　x = a+ 2　と x = 0 , x = 4 の位置関係が重要となる。

x= 0 , x= 4の値を調べると、
f(0) = - a ^2 - 8 a - 13 = -22　=> (a + 9) (a - 1) = 0　∴ a = -9, 1
f(4) = - a ^2- 13 = -22　=> (a + 3) (a - 3)　= 0　∴ a = -3, 3

ここで　x = 2 とは、0 ≦ x ≦4 の中点

解法のコツは　場合分け
1）　a + 2 < 0 の場合　=> x = 4の時、最小値をとる
a < - 2　という隠れた条件があるので、　a = -3

2）　0 < a + 2 <　2 の場合　=> x = 4の時、最小値をとる
-2 < a <0　という隠れた条件があるので、　解なし

3）　2 < a + 2 <　4 の場合　=> x = 0の時、最小値をとる
0 < a < 2　という隠れた条件があるので、　a = 1

4）　4 < a + 2　の場合　=> x = 0の時、最小値をとる
2 < a　という隠れた条件があるので、　解なし

a = 1 の時、① 式は
y = - x ^2 + (2 + 4)x - 1 - 8 -13
= - x ^2 + 6x - 22 = - (x - 3) ^ 2 - 13…②

上に凸なグラフで　頂点のx座標が
範囲 0 ≦ x ≦ 4 の中にあるので
x= 3　のとき、最大値 -13をとる。

a = -3 の時、① 式は
y = - x ^2 + (-6 + 4)x - 9 +24 -13
= - x ^2　- 2 x + 2 = - (x + 1) ^ 2 + 3…③

②と③より
x 軸方向に + 4
y 軸方向に - 16 平行移動したら一致する